TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Martti Helenius

z-muunnos ja differenssiyhtälöt

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Joulukuu 2014

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
HELENIUS, MARTTI: z-muunnos ja differenssiyhtälöt
Pro gradu -tutkielma, 32 s.
Matematiikka
Joulukuu 2014

Tiivistelmä

Tämä on tutkielma z-muunnoksesta, jota voidaan käyttää diskreettejä systeemejä kuvaavien differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa. Muunnoksen avulla voidaan differenssiyhtälö muuttaa algebralliseen muotoon, jonka ratkaisusta käänteisellä muunnoksella saadaan differenssiyhtälön ratkaisu.

Tutkielmassa lähdetään liikkeelle kompleksianalyysin perustuloksista ja päädytään residylaskentaan, joka tarjoaa käänteistä muunnosta varten tärkeän apuvälineen. Näiden jälkeen esitetään z-muunnoksen määritelmä sekä useita differenssilaskennan kannalta tärkeitä lauseita. Lopuksi sovelletaan z-muunnosta differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen. Ratkaisumenetelmiä kuvattaessa tuodaan esille yhtymäkohtia perinteiseen differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen.

Lukijalta vaaditaan kompleksianalyysin ja differenssilaskennan perusteiden hallintaa. Kompleksianalyysin osalta lähdeteoksena on käytetty J.H. Mathewsin ja H.W. Russellin kirjaa Complex Analysis for Mathematics and Engineering, jota käytetään myös z-muunnosta ja sen soveltamista koskevissa osissa. W.G. Kelleyn ja A.C. Petersonin kirja Difference Equations: An Introduction with Applications sekä R. Vichin kirja Z Transform Theory and Applications ovat merkittävät lähdeteokset z-muunnoksen ja differenssiyhtälöiden tarkastelussa.

Sisältö

1 Johdanto

Differenssiyhtälöitä voidaan ratkaista joko differenssilaskennan menetelmin tai jonojen funktionaalisilla muunnoksilla. Tässä tutkielmassa tarkastellaan z-muunnosta, joka on tärkeä apuväline monella sovelletun matematiikan alalla kuten signaalinkäsittelyssä, väestötieteissä, taloustieteissä sekä muilla aloilla, joissa on ratkaistava aikadiskreettejä malleja.

Aluksi luvussa 2 esitetään joitakin kompleksianalyysin määritelmiä ja lauseita. Tärkeitä ovat residylaskentaan liittyvät tulokset, joita tarvitaan myöhemmin käänteisen z-muunnoksen löytämiseksi.

Luvussa 3 määritellään z-muunnos, jolla annetun lukujonon tarkastelusta voidaan siirtyä käsittelemään kompleksista potenssisarjaa. Muunnos on olemassa kyseisen sarjan suppenemisalueessa, joka on ratkaistavissa suppenemista koskevien testien avulla. Myös käänteinen muunnos määritellään tässä luvussa. Perusideahan on matematiikassa tyypillinen. Vaikea tehtävä muunnetaan toiseen muotoon, jolloin voidaan soveltaa uusia tehokkaampia keinoja edetä ratkaisussa. Käänteisen muunnoksen avulla palataan sitten alkuperäiseen esitystapaan. z-muunnosta voikin pitää jatkuvien funktioiden Laplace-muunnoksen vastineena diskreetissä maailmassa. Tässä luvussa käydään läpi ja todistetaan myös useita differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa tarvittavia lauseita.

Diskreettien aikasysteemien kuvauksista saatuja malleja ratkaistaan differenssiyhtälöiden avulla samaan tapaan, kuin differentiaaliyhtälöitä käytetään jatkuvien muuttujien tapauksessa. Viimeisessä luvussa tarkastellaan z-muunnosta hyödyntäviä keinoja lineaaristen vakiokertoimisten differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa.

Lukijalta edellytetään kompleksianalyysin hallintaa. Lähtökohtana on, että lukija on tutustunut analyyttisiin funktioihin ja siten tuntee esimerkiksi holomorfiset funktiot, kompleksiset potenssisarjat sekä niiden välisen yhteyden merkityksen. Kompleksianalyyttisestä perustasta joudutaan pakostakin osa sivuuttamaan vain maininnalla. Tarvittavia tuloksia esitetään ja niihin viitataan, kun se asian selkeyttämiseksi on erityisen tarpeellista. Tutkielmassa differenssiyhtälöitä käsitellään muunnoksen sovellusalueena, joten lukijan tulee olla perehtynyt myös differenssilaskentaan ja sen peruskäsitteisiin.

Tässä työssä, kompleksianalyysin osalta yksinomaan, on merkittävänä lähdeteoksena käytetty J.H. Mathewsin ja H.W. Russellin kirjaa Complex Analysis for Mathematics and Engineering. W.G. Kelleyn ja A.C. Petersonin kirjalla Difference Equations: An Introduction with Applications sekä R. Vichin kirjalla Z Transform Theory and Applications on ollut tärkeä osansa z-muunnosta ja differenssiyhtälöitä käsiteltäessä.

2 Kompleksianalyysin esitietoja

Johdannossa todettiin, että lukijalta edellytetään kompleksianalyysin hallintaa. On kuitenkin tarpeellista käydä läpi joitakin keskeisiä määritelmiä ja tuloksia, joita jatkossa tarvitaan.

2.1 Potenssisarjafunktion suppeneminen

Selvennetään aluksi, että kiekolla D_r tarkoitetaan *avointa kiekkoa*

$$D_r = D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \tag{2.1}$$

missä $z_0 \in \mathbb{C}$ on kiekon keskipiste ja reaaliluku $r > 0$ on kiekon säde. *Punkteeratulla kiekolla* D_r^* tarkoitetaan kiekkoa

$$D_r^* = D_r^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}. \tag{2.2}$$

Lisäksi *renkaalla* $A(z_0, r, R)$ tarkoitetaan avointa rengasta

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \tag{2.3}$$

jonka keskipiste on z_0, ja missä reaaliluvuille r ja R, jotka ovat renkaan säteitä, pätee $0 \le r < R$.

Funktioiden esittäminen potenssisarjojen avulla (potenssisarjafunktiot) on kompleksianalyysin yksi peruspiirteistä, ja ensimmäinen lause koskeekin kompleksisen potenssisarjan suppenemista. Kun myöhemmin tarkastellaan z-muunnoksen suppenemista, voidaan palata seuraaviin lauseisiin.

Lause 2.1. *Olkoon funktio $f(z)$ määritelty potenssisarjana*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

missä muuttuja z sekä vakiot z_0 ja c_n ovat kompleksilukuja. Tällöin niiden pisteiden joukko, joissa sarja suppenee on yksi seuraavista:

(i) *yksi piste $z = z_0$,*

(ii) *kiekko $D_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho\}$ mahdollisesti mukaanlukien koko ympyrän kehä tai osa kehästä $C_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}$,*

(iii) *koko kompleksitaso.*

Todistus. Ks. [3, s. 148]. □

Yllä olevan perusteella voidaan myös sanoa, että kohdassa (ii) potenssisarja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ suppenee, kun $|z - z_0| < \rho$, ja hajaantuu, kun $|z - z_0| > \rho$ (kehällä C_ρ potenssisarja voi joko supeta tai hajaantua). Nyt reaaliluku ρ on potenssisarjan *suppenemissäde*. Lisäksi sovitaan, että kohdassa (i) suppenemissäde $\rho = 0$ ja kohdassa (iii) $\rho = \infty$. Vrt. [3, s. 148].

Lause 2.2. *Funktiolle $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ voidaan löytää suppenemissäde ρ seuraavilla tavoilla:*

(i) *Cauchyn juuritestillä, jolloin* $\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$,

(ii) *Cauchy-Hadamardin kaavalla, jolloin* $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$,

(iii) *d'Alembertin suhdetestillä, jolloin* $\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$

edellyttäen, että kohtien (i) ja (iii) raja-arvot ovat olemassa. Lisäksi asetetaan $\rho = \infty$, jos raja-arvo on nolla, ja $\rho = 0$, jos raja-arvo on ääretön.

Todistus. Ks. [3, s. 149]. □

Koska edellä kohdan (ii) raja-arvo on aina olemassa, voidaan suppenemissäde aina määrittää, jos potenssisarjan kertoimet tunnetaan. Huomautettakoon lisäksi, että (d'Alembertin) suhdetestillä usein viitataan yleisesti kompleksisen sarjan suppenemiseen. Seuraavaksi tähän liittyvä lause, jonka todistus voidaan samanlaisena kuin reaalinen vastineensa nyt sivuuttaa.

Lause 2.3. Vrt. [3, s. 143] (d'Alembertin suhdetesti). *Jos kompleksisarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}\right| = L,$$

niin sarja suppenee itseisesti, kun $L < 1$, ja hajaantuu, kun $L > 1$.

2.2 Erikoispisteet

Kompleksifunktiolla $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, sanotaan olevan *erikoispiste* $z_0 \in \mathbb{C}$, jos f ei ole analyyttinen pisteessä z_0, mutta jonka jokainen R-säteinen ympäristö $D_R(z_0)$ sisältää vähintään yhden pisteen, jossa f on analyyttinen. Pistettä z_0 sanotaan *eristetyksi erikoispisteeksi*, jos on olemassa $R > 0$, siten että funktio f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D_R^*(z_0)$. Vrt. [3, s. 276].

Tarkastellaan Laurentin sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{2.4}$$

missä kertoimet c_n ($n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$) ovat kompleksisia vakioita. Nyt eristetyt erikoispisteet voidaan luokitella seuraavasti.

Määritelmä 2.1. Vrt. [3, s. 277]. Olkoon funktiolla $f(z)$ eristetty erikoispiste z_0 ja Laurentin sarjan esitys

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Tällöin erotetaan kolme tyyppiä erikoispisteelle z_0 seuraavasti.

(i) Jos $c_n = 0$, kun $n = -1, -2, -3, \ldots$, niin funktiolla f on *poistuva erikoispiste* pisteessä z_0.

(ii) Jos positiivisella kokonaisluvulla k pätee $c_{-k} \neq 0$, mutta $c_n = 0$, kun $n < -k$, niin funktiolla f on *k-kertainen napa* pisteessä z_0.

(iii) Jos $c_n \neq 0$ äärettömän monella negatiivisella kokonaisluvulla n, niin funktiolla f on *oleellinen erikoispiste* pisteessä z_0.

Esimerkki 2.1. (Vrt. [3, s. 278], kohta ii.) Jos funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0, sen Laurentin sarjan esitys on

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

missä $c_{-k} \neq 0$. Tiedetään, että $\sin z$ voidaan esittää sarjana

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots .$$

Täten siis funktiolla

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots$$

on kaksinkertainen napa pisteessä $z = 0$.

Jatkossa merkittävin erikoispiste on nimenomaan napa, joten on perusteltua esittää kaksi sitä koskevaa lausetta.

Lause 2.4. *Olkoon funktio $f(z)$ analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D_r^*(z_0)$. Tällöin funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0, jos ja vain jos funktio f voidaan esittää muodossa*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k},$$

missä funktio $h(z)$ on analyyttinen pisteessä z_0, ja $h(z_0) \neq 0$.

Todistus. Ks. [3, s. 280 – 281]. □

Funktion raja-arvon avulla voidaan todeta, onko kyseessä napa, poistuva erikoispiste vai oleellinen erikoispiste (ks. [3, s. 287 – 288]).

Lause 2.5. *Olkoon funktio $f(z)$ analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D_r^*(z_0)$. Tällöin funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0, jos ja vain jos*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty .$$

Todistus. Ks. [3, s. 288]. □

2.3 Residy

Kohta esitettävä määritelmä liittyy sekin Laurentin sarjaan, johon tässä vaiheessa on syytä liittää seuraava lause.

Lause 2.6. *Olkoon renkaassa $z \in A(z_0, r, R)$ funktio f analyyttinen ja funktiolla Laurentin sarjan esitys*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Tällöin seuraavat ovat voimassa.

(i) *Jos kaikilla $z \in A(z_0, r, R)$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n ,$$

niin $b_n = c_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Kaikilla $z \in A(z_0, r, R)$ funktion $f(z)$ derivaatat $f^{(n)}(z)$ saadaan derivoimalla termeittäin funktion f Laurentin sarja.*

Todistus. Ks. [3, s. 272]. □

Lause kertoo, että Laurentin sarja on yksikäsitteinen ja että kaikki sen derivaatat ovat olemassa ja termeittäin derivoimalla löydettävissä.

Määritelmä 2.2. Vrt. [3, s. 291]. Olkoon funktiolla $f(z)$ ei-poistettavissa oleva eristetty erikoispiste pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin jossakin punkteeratussa kiekossa $D_R^*(z_0)$ funktiolla f on kaikilla $z \in D_R^*(z_0)$ Laurentin sarjan esitys

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Kerroin a_{-1} on funktion *residy* pisteessä z_0 ja merkitään

$$\mathrm{Res}[f, z_0] = a_{-1}.$$

Seuraavien kahden lauseen avulla voidaan myöhemmin helpottaa huomattavasti käänteisen z-muunnoksen löytämistä.

Lause 2.7 (Cauchyn residylause)**.** *Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue, joka sisältää positiivisesti suunnistetun yksinkertaisen suljetun polun C. Jos $f(z)$ on analyyttinen polulla C ja polun C sisäpuolella lukuunottamatta pisteitä $z_1, z_2, \ldots, z_n$, jotka ovat polun C sisäpuolella, niin*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f, z_k].$$

Todistus. Ks. [3, s. 293]. □

Residyjen laskentaan on johdettavissa hyödyllinen apuväline.

Lause 2.8. (Napojen residy).

(i) *Jos funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(ii) *Jos funktiolla f on kaksinkertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0)^2 f(z) \right].$$

(iii) *Jos funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right].$$

Todistus. Vrt. [3, s. 294 – 295]. Jos funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0, sen Laurentin sarjan esitys on

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet tekijällä $(z - z_0)$ ja otetaan raja-arvo $z \to z_0$. Nyt

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \to z_0} \Big(a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots \Big) \\ &= a_{-1} = \operatorname{Res}[f, z_0],\end{aligned}$$

jolloin (i) on todistettu.

Kohta (ii) on kohdan (iii) erikoistapaus, joten todistetaan vain jälkimmäinen. Oletetaan siis, että funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0. Tällöin funktiolla f on esitys

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots.$$

Kertomalla molemmat puolet tekijällä $(z - z_0)^k$ päästään yhtälöön

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots.$$

Lauseen 2.6 perusteella Laurentin sarjan derivaatat ovat olemassa ja ne saadaan derivoimalla termeittäin, joten derivoidaan $(k - 1)$ kertaa. Tällöin yhtälön oikean puolen alkupään termit katoavat ja jäljelle jää

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = (k-1)! a_{-1} + \frac{k!}{1!} a_0(z - z_0) + \frac{(k+1)!}{2!} a_1(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Nyt raja-arvo $z \to z_0$ nollaa yhtälön oikean puolen termit ensimmäistä lukuunottamatta. Täten päädytään tulokseen

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = (k-1)! a_{-1} = (k-1)! \mathrm{Res}[f, z_0],$$

mistä nähdään kohdan (iii) tulleen todistetuksi. □

Esimerkki 2.2. (Vrt. [3, s. 296], esim. 8.5.) Etsitään integraali

$$\int_{C_3^+(0)} \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} \, dz.$$

Merkinnällä $C_r^+(0)$ tarkoitetaan integrointia pitkin origokeskeistä ympyrää $\{z : |z| = r\}$ positiiviseen suuntaan (vastapäivään). Kirjoitetaan integroitava funktiona

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}.$$

Nyt funktion erikoispisteet ovat yksinkertaiset navat pisteissä 1 ja -2 sekä kaksinkertainen napa origossa. Nämä sijaisevat ympyrän $C_3^+(0)$ sisäpuolella, joten voidaan laskea residyt. Kaksinkertaiselle navalle saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f, 0] &= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}((z-0)^2 f(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2 + z - 2} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{(-1)(2z+1)}{(z^2 + z - 2)^2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Yksinkertaisille navoille puolestaan lasketaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f, 1] &= \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2(z+2)} = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \\
\mathrm{Res}[f, -2] &= \lim_{z \to -2} (z+2) f(z) \lim_{z \to -2} \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{12}.
\end{aligned}$$

Täten residylauseen nojalla

$$\int_{C_3^+(0)} \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} \, dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = 0.$$

3 z-muunnos

3.1 Määritelmä ja suppenemisalue

Differenssiyhtälön tarkastelussa voidaan z-muunnoksen avulla siirtyä kompleksifunktion tutkimiseen ja hyödyntää kompleksianalyysin tuloksia. Tehdään siis muunnos, sovelletaan muunnoksen tuomia uusia mahdollisuuksia ja lopuksi käänteisen muunnoksen avulla saadaan ratkaisu alkuperäiseen ongelmaan. Tässä työssä lähtökohtana on usein, että reaalilukujen maailmasta siirrytään kompleksilukujen pariin, jolloin z-muunnos voitaisiin määritellä vain reaalilukujonoille (vrt. [3, s. 337]). Toisaalta differenssiyhtälöiden ratkaisu voi olla kompleksinen, joten z-muunnoksen soveltaminen näihin yhtälöihin edellyttää kompleksista määritelmää. Lisäksi on huomattava, että z-muunnoksen määrittely koskemaan kompleksijonoja on perusteltua senkin takia, että trigonometristen funktioiden kohdalla siirrytään yleensä kompleksilukuesitykseen (ks. esimerkki 3.5).

Määritelmä 3.1. Vrt. [4, s. 5]. Kompleksisen lukujonon $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *z-muunnos* on funktio

$$Z(x_n) = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

kaikilla niillä $z \in \mathbb{C}$, joilla sarja suppenee.

Kyseessä on yksipuolinen z-muunnos, jolloin siis $x_n = 0$ kaikilla $n < 0$. Tarkasteltavien differenssiyhtälöiden näkökulmasta rajoittuminen yksipuoliseen muunnokseen on riittävä. Todettakoon myös, että tilanteen mukaan jonosta $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ voidaan jatkossa jättää indeksointi pois tai käyttää vain lyhyesti merkintää x_n. Viimeksi mainittua käytetään erityisesti differenssiyhtälöiden yhteydessä.

Suppenemissäteen löytämiseksi voidaan soveltaa lausetta 2.2, missä potenssisarjan muuttujana on käänteisluku $1/z$. Voidaan käyttää esim. Cauchy-Hadamardin kaavaa

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |x_n|^{1/n}}, \tag{3.1}$$

missä potenssisarja suppenee, kun $|z| < \rho$. Täten z-muunnoksessa $|1/z| < \rho$ ja siis $1/\rho < |z|$. Nyt suppenemissäde on $1/\rho$ ja merkitsemällä sitä reaaliluvulla R saadaan z-muunnoksen suppenemissäteeksi

$$R = \limsup_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} \tag{3.2}$$

ja sarja suppenee, kun $|z| > R$. Suppenemisalue on siis R-säteisen kiekon ulkopuolinen alue. Kun $z = R$, sarja voi supeta tai hajaantua. Jos $R = 0$, niin sarja suppenee kaikkialla kompleksitasossa mahdollisesti origoa lukuunottamatta. Toisaalta, jos $R = \infty$, niin z-muunnos hajaantuu kaikkialla.

Suppenemisäteen ratkaisemisessa voidaan käyttää myös kompleksisarjojen yleistä suppenemista koskevaa lausetta 2.3. Tällöin pätee z-muunnoksen suppenemiselle

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}z^{-(n+1)}}{x_n z^{-n}}\right| < 1$$

ja edelleen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < |z|\,.$$

Tässä raja-arvosta saadaan suppenemissäde R ja suppenemisalue on R-säteisen kiekon ulkopuolinen alue. Tähän samaan tulokseen päädyttäisiin tietenkin myös lauseen 2.2 suhdetestin avulla. Vrt. [1, s. 222].

Esimerkki 3.1. (Vrt. [1, s. 222 – 223], esim. 5.1.) Etsitään z-muunnos ja sen suppenemisalue jonolle $\{a^n\}$, missä vakio $a \in \mathbb{R}$.
Nyt jonon $\{a^n\}$ z-muunnos on

$$Z(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}.$$

Nähdään heti, että suppenemissäde

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right| = |a|\,.$$

Geometrisen sarjan summakaavaa hyödyntäen saadaan

$$Z(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-(a/z)} = \frac{z}{z-a}\,,$$

joka siis suppenee, kun $|z| > |a|$.

Lopuksi kaksi myöhemmin varsin hyödyllisiksi osoittautuvaa erikoistapausta.

Esimerkki 3.2. (Vrt. [3, 341], esim. 9.2.) Etsitään z-muunnos ja suppenemisalue *yksikköaskeljonolle*

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{kun}\, n \geq 0 \\ 0, & \text{kun}\, n < 0. \end{cases}$$

Nähdään, että muunnos on geometrinen sarja

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}\,,$$

joka suppenee, kun $|1/z| < 1$ eli $|z| > 1$.

Huomautettakoon, että yksikköaskeljono voidaan esittää myös yksinkertaisesti ykkösjonona $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$, jolle tietenkin pätee myös $Z(1) = \frac{z}{z-1}$ (vrt. [2, s. 107], esim. 3.31).

Esimerkki 3.3. (Vrt. [3, s. 340 – 341], esim. 9.1.) Lasketaan z-muunnos *impulssijonolle*

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{kun}\, n = 0 \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Suoraan z-muunnoksen määritelmästä nähdään, että

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot z^{-n} = 1.$$

3.2 Käänteinen z-muunnos

Edellä määriteltiin z-muunnos, jolla voidaan siirtyä tarkastelemaan kompleksifunktiota ja hyödyntämään kompleksianalyysin menetelmiä. Luonnollisesti tarvitaan käänteinen muunnos, jolla päästään takaisin alkuperäisen ongelman ratkaisemiseen.

Lause 3.1. *Olkoon $X(z)$ jonon $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ z-muunnos, joka suppenee, kun $R < z$, ja olkoon C positiivisesti suunnistettu yksinkertainen suljettu polku, joka kiertää origoa ja sisältyy alueeseen $R < z$. Tällöin*

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z)\, z^{n-1}\, dz. \tag{3.3}$$

Sanotaan, että yhtälö (3.3) on käänteinen z-muunnoskaava ja merkitään

$$x_n = Z^{-1}[X(z)]. \tag{3.4}$$

Todistus. Vrt. [3, s. 338 – 339]. Suoraan z-muunnoksen määritelmästä 3.1 kertomalla yhtälön molemmat puolet tekijällä z^{n-1} voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} X(z)z^{n-1} &= (\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}) z^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k+n-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k z^{-k+n-1} + \frac{x_n}{z^1} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k+n-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{z^{k-n+1}} + \frac{x_n}{z^1} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k+n-1}. \end{aligned}$$

Nyt integroimalla termeittäin pitkin käyrää C saadaan

$$\int_C X(z)z^{n-1}\,dz = \sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k\int_C \frac{1}{z^{k-n+1}}\,dz) + \int_C \frac{x_n}{z}\,dz + \sum_{k=0}^{n-1}(x_k\int_C z^{-k+n-1})\,dz.$$

Kompleksianalyysin perusteella tiedetään (ks. esim. [3, s. 224]), että pitkin polkua C integraali

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^t} = 0 \qquad (\text{nyt}\, z_0 = 0,\ t \in \mathbb{Z}),$$

paitsi, kun $t = 1$, jolloin se saa arvon $2\pi i$. Täten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\int_C X(z)z^{n-1}\,dz &= \sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k 0) + 2\pi i x_n + \sum_{k=0}^{n-1}(x_k 0)\\ &= 2\pi i x_n.\end{aligned}$$

Nähdään siis, että

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

□

Nyt saadaan käänteistä muunnosta varten kaksi seurauslausetta, joista ensimmäinen yhdistää z-muunnoksen ja residy-laskennan. Edellisen lauseen ja Cauchyn residylauseen 2.7 perusteella seuraava tulos on ilmeinen.

Seurauslause 3.1. Olkoon $X(z)$ jonon $\{x_n\}$ z-muunnos. Tällöin pätee

$$x_n = Z^{-1}[X(z)] = \sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}, z_j]\,,$$

missä $z_1, z_2, \dots, z_k$ ovat funktion $f(z) = X(z)z^{n-1}$ navat.

Mikäli siis kyseessä olisivat yksinkertaiset navat, käänteinen muunnos saataisiin napojen residyjen avulla suoraviivaisesti edellisen seurauslauseen ja lauseen 2.8 perusteella.

Seurauslause 3.2. Jos z-muunnoksella $X(z)$ on yksinkertaiset navat $z_1, z_2, \dots, z_k$, niin

$$x_n = Z^{-1}[X(z)] = \sum_{i=1}^{k}\left(\lim_{z\to z_i}(z-z_i)X(z)z^{n-1}\right).$$

Vrt. [3, s. 340].

Käänteisen z-muunnoksen löytämiseksi residylaskenta on usein hyvä vaihtoehto, varsinkin jos z-muunnoksella on vain yksinkertaisia napoja. Joskus helpoin tapa on käyttää valmiita taulukoita, joissa on lueteltu jonoja ja niiden muunnoksia (ks. esim. [1, s. 255] tai [3, s. 342, 345]). On myös mahdollista käyttää erilaisia sarjoihin liittyviä keinoja.

Esimerkki 3.4. Etsitään käänteinen z-muunnos $x_n = Z^{-1}[\frac{4z}{4z-1}]$ kehittämällä $X(z)$ geometriseksi sarjaksi. Nyt

$$X(z) = \frac{4z}{4z-1} = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4}z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^{-n},$$

josta nähdään, että määritelmän 3.1 mukainen

$$x_n = \frac{1}{4^n}\,.$$

Tässä voisi jo aikaisemmin huomata, että kyseessä on jonon $\{a^n\}$ (esimerkki 3.1) z-muunnos.

Usein edellisen kaltaiset perustapaukset löytyvät kaikista muunnostaulukoista. Huomattavaa on myös, että tavallisimpien funktioiden z-muunnos on rationaalifunktio (ks. [3, s. 342]). Kun z-muunnos $X(z)$ on (supistetussa muodossa oleva) rationaalifunktio eli se on muotoa

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_{p-1}z^{p-1} + b_p z^p}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{q-1}z^{q-1} + a_q z^q},$$

missä $P(z)$ ja $Q(z)$ ovat astetta p ja q olevat polynomit ($a_0, \ldots, a_q$ ja $b_0, \ldots, b_p$ vakioita), ne ovat analyyttisia kompleksitasossa lukuunottamatta äärellistä määrää eristettyjä singulariteetteja, jotka ovat nimittäjän nollakohdista $Q(z) = 0$ löytyviä napoja. [3, s. 339 – 340].

3.3 z-muunnoksen ominaisuuksia

Seuraavaksi esitetään joitakin erityisesti differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa hyödyllisiä lauseita.

Lause 3.2 (Lineaarisuus)**.** *Olkoon jonon $\{x_n\}$ z-muunnos $Z(x_n)$ ja sen suppenemissäde R_1, ja olkoon jonon $\{y_n\}$ muunnoksen $Z(y_n)$ suppenemissäde R_2. Tällöin kaikilla vakioilla $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ pätee*

$$Z(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 Z(x_n) + c_2 Z(y_n),$$

kun $|z| > \max(R_1, R_2)$.

Todistus. Vrt. [2, s. 108]. Suoraan z-muunnoksen määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} Z(c_1 x_n + c_2 y_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1 x_n + c_2 y_n}{z^n} \\ &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} \\ &= c_1 Z(x_n) + c_2 Z(y_n)\,. \end{aligned}$$

Nyt $Z(x_n)$ suppenee, kun $|z| > R_1$, ja $Z(y_n)$ suppenee, kun $|z| > R_2$. Täten $Z(c_1 x_n + c_2 y_n)$ suppenee, kun $|z| > \max(R_1, R_2)$. □

Esimerkki 3.5. (Vrt. [1, s. 224], esim. 5.4.) Etsitään jonon $\{\sin(\omega n)\}$ z-muunnos.
Käytetään sinifunktiolle eksponenttiesitystä

$$\sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

ja vastaavasti kosinille esitystä

$$\cos\omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}\,.$$

Nyt edellisen olevan lauseen nojalla

$$Z(\sin(\omega n)) = \frac{1}{2i}\,[Z(e^{i\omega n}) - Z(e^{-i\omega n})].$$

Esimerkin 3.1 perusteella

$$\begin{aligned} Z(\sin(\omega n)) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}}\right) \\ &= \frac{z\sin\omega}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\ &= \frac{z\sin\omega}{z^2 - (e^{i\omega} + e^{-i\omega})z + 1} \\ &= \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}\,, \end{aligned}$$

joka suppenee, kun $|z| > 1$, koska $|e^{i\omega}| = |e^{-i\omega}| = 1$.

Seuraavissa kahdessa lauseessa on kyse *siirroista* (shifting). Signaalinkäsittelyssä, josta monet z-muunnokseen liittyvät termit ovat peräisin, käytetään nimityksiä *aikaistus* ja *viive.*

Lause 3.3 (Aikaistus)**.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k pätee*

$$Z(x_{n+k}) = z^k X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x_m z^{k-m}.$$

Todistus. Vrt. [2, s. 111 – 112]. Todetaan ensiksi, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^{-n} = x_k z^0 + x_{1+k} z^{-1} + x_{2+k} z^{-2} + \cdots$$

ja

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n z^{-n+k} = x_k z^0 + x_{k+1} z^{-1} + x_{k+2} z^{-2} + \cdots$$

ovat samat sarjat. Suoraan z-muunnoksen määritelmästä saatua sarjaa muokkaamalla nähdään, että

$$\begin{aligned}
Z(x_{n+k}) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^{-n} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} x_n z^{-n+k} \\
&= z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} - \sum_{m=0}^{k-1} x_m z^{-m} \right) \\
&= z^k X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x_m z^{k-m}.
\end{aligned}$$

□

Edellisen lauseen perusteella saadaan ensimmäisille kolmelle k:n arvolle tulokset tilanteessa, jossa alkuarvot x_0, x_1 ja x_2 tunnetaan:

(i) $Z(x_{n+1}) = z(X(z) - x_0)$,

(ii) $Z(x_{n+2}) = z^2(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1})$,

(iii) $Z(x_{n+3}) = z^3(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1} - x_2 z^{-2})$.

Lause 3.4 (Viive)**.** *Olkoon viivästetty yksikköaskeljono u_{n-k} määritelty seuraavasti*

$$u_{n-k} = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k. \end{cases}$$

Tällöin kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k pätee

$$Z(x_{n-k} u_{n-k}) = z^{-k} X(z).$$

Todistus. Vrt. [2, s. 111 – 112].

Määritelmän mukaan

$$Z(x_{n-k} u_{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} u_{n-k} z^{-n}.$$

Nyt kaikki termit, joissa $n < k$, nollautuvat, ja edelleen sarjan indeksointeja muokkaamalla päädytään tulokseen

$$\begin{aligned} Z(x_{n-k}u_{n-k}) &= \sum_{n=k}^{\infty} x_{n-k}z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n-k} \\ &= z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= z^{-k}X(z). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.6. (Vrt. [2, 112], esim. 3.37.) Viivästetyn yksikköaskeljonon u_{n-k} z-muunnos voidaan laskea edellisen lauseen avulla, jolloin

$$Z(u_{n-k}) = Z(1 \cdot u_{n-k}) = z^{-k}Z(1) = z^{-k}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{1-k}}{z-1}.$$

Lauseen 3.4 perusteella nähdään helposti myös tulos

$$Z(a^{n-1}u_{n-1}) = \frac{1}{z}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}. \tag{3.5}$$

Seuraavassa lauseessa käytetään Cauchyn tulosarjaa (ks. [3, s. 130]) ja potenssisarjan ominaisuuksia (ks. [3, s. 262]), jotka oletetaan tunnetuiksi.

Lause 3.5 (Konvoluutio)**.** *Olkoot $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ jonoja, joita vastaavat z-muunnokset ovat $X(z)$ ja $Y(z)$ sekä niiden suppenemisalueet $|z| > R_1$ ja $|z| > R_2$. Tällöin, kun $|z| > \max\{R_1, R_2\}$, pätee*

$$Z(x_n * y_n) = X(z)Y(z),$$

missä konvoluutio $x_n * y_n$ on määritelty summana $\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}$.

Todistus. Vrt. [3, s. 344]. Nyt z-muunnoksiin $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ ja $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$ voidaan sijoittaa $d = z^{-1}$, jolloin Cauchyn tulosarjan perusteella

$$X(z)Y(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n d^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n d^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i})d^n\right).$$

Nähdään, että

$$X(z)Y(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i})z^{-n}\right) = Z\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right),$$

kun $|z| > \max\{R_1, R_2\}$. □

Edellisen lauseen perusteella voidaan nähdä, että jos $Z(x_n)$ suppenee, kun $|z| > R$ ja kirjoitetaan $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1 * x_n$, niin

$$Z\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = Z(1)Z(x_n) = \frac{z}{z-1}Z(x_n), \tag{3.6}$$

joka suppenee, kun $|z| > \max\{1, R\}$. Vrt. [2, s. 123].

Tässä on syytä huomauttaa, että konvoluutio on vaihdannainen (ks. esim. [4, s. 21]). Tällöin siis

$$x_n * y_n = y_n * x_n \tag{3.7}$$

ja kahta eri summausjärjestystä voidaan käyttää, jolloin

$$x_n * y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_{n-i}. \tag{3.8}$$

Joskus z-muunnosta ratkaistaessa joudutaan integroimaan, jolloin seuraava lause voi auttaa löytämään integrointivakion.

Lause 3.6 (Alkuarvolause)**.** *Jos on olemassa $X(z)$, kun $|z| > R$, niin tällöin*

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Todistus. Vrt. [2, s. 114]. Suoraan määritelmän nojalla kirjoitetaan

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots,$$

mistä väite seuraa, kun z lähestyy ääretöntä. □

Kartutetaan lausevalikoimaa vielä yhdellä, jonka jälkeen ollaan valmiita siirtymään differenssiyhtälöiden pariin.

Lause 3.7. *Olkoon $X(z) = Z(x_n)$, joka suppenee, kun $|z| > r$. Tällöin*

$$Z((n(n+1)\cdots(n+k-1))\,x_n) = (-1)^k z^k \frac{d^k}{dz^k} X(z) \quad (|z| > r).$$

Todistus. Vrt. [2, s. 109 – 110]. Määritelmän mukaan

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad \text{kun } |z| > r.$$

Nyt derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dz^k} X(z) &= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\cdots(n+k-1) x_n z^{-n-k} \\
&= \frac{(-1)^k}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n(n+1)\cdots(n+k-1))\,x_n}{z^n} \\
&= \frac{(-1)^k}{z^k} Z((n(n+1)\cdots(n+k-1))\,x_n).
\end{aligned}$$

Nähdään, että

$$Z((n(n+1)\dots(n+k-1))\,x_n) = (-1)^k z^k \,\frac{d^k}{dz^k} X(z) \quad (|z| > r).$$

$\square$

Edellisen lauseen tapauksessa $k = 1$ on selvää, että

$$Z(nx_n) = -z\frac{d}{dz}X(z). \tag{3.9}$$

Vrt. [2, s. 110].

Esimerkki 3.7. Etsitään muunnos $Z(n)$.
Edellisen yhtälön perusteella nähdään, että

$$\begin{aligned} Z(n) &= Z(n \cdot 1) \\ &= -z\frac{d}{dz}Z(1). \end{aligned}$$

Aikaisemmin on laskettu ykkösjonon z-muunnos, joten ratkaistaan

$$\begin{aligned} Z(n) &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\ &= -z\frac{-1}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}\,. \end{aligned}$$

Esitetään vielä esimerkin 3.7 ja lauseen 3.4 perusteella saatava tulos

$$Z((n-1)\,u_{n-1}) = z^{-1}Z(n) = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\,. \tag{3.10}$$

Yhtälö osoittautuu myöhemmin hyödylliseksi, kun ratkaistaan käänteisiä muunnoksia.

4 Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen

4.1 Differenssiyhtälöistä

Laplace-muunnos on usein käytetty menetelmä lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Vastaavasti z-muunnosta voidaan soveltaa diskreettien systeemien ja differenssiyhtälöiden tapauksessa. Tarkastellaan kertalukua p olevaa lineaarista vakiokertoimista ei-homogeenista differenssiyhtälöä, joka voidaan esittää muodossa

$$a_p\, y_{n+p} + a_{p-1}\, y_{n+p-1} + \cdots + a_0 y_n = x_n \,, \tag{4.1}$$

missä kertoimet $a_0, \ldots, a_p$ ovat reaalisia vakioita ja $a_0 \neq 0$ sekä $a_p \neq 0$. Jono $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ on annettu ja jono $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ on tuntematon. Differenssilaskennan perusteista tiedetään, että tämän yhtälön ratkaisu on muotoa

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(e)}, \tag{4.2}$$

missä $y_n^{(h)}$ on vastaavan homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu ja $y_n^{(e)}$ on täydellisen yhtälön erityisratkaisu. Tavallisesti yhtälö (4.1) voidaan ratkaista kaksivaiheisesti etsimällä homogeeninen ratkaisu ja erityisratkaisu sekä yhdistämällä saadut tulokset. Yhtälöön (4.1) liittyvä homogeeninen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa (vakio a_p voidaan jakaa pois)

$$y_{n+p} + a_{p-1}\, y_{n+p-1} + \cdots + a_0 y_n = 0 \,, \tag{4.3}$$

jolloin sen karakteristisen yhtälön

$$r^p + a_{p-1} r^{p-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{4.4}$$

juurien $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{C}$ avulla voidaan homogeeninen yhtälö ratkaista. Erityisratkaisu $y_n^{(e)}$ puolestaan pyritään etsimään tilanteeseen sopivien yritteiden avulla. Vrt. [2, s. 60 – 62, 70].

Kun käytetään z-muunnosta, differenssiyhtälön käsittelyä ei tarvitse eriyttää. Lineaarisuutta ja aikaistusta koskevat lauseet 3.2 ja 3.3 mahdollistavat suoraviivaisen etenemisen. Toisaalta muunnoksen avulla saadusta tuloksesta ei suoraan voi tietää, mikä on erityisratkaisu ja mikä ratkaisun homogeeninen osa, joskin se usein on helposti pääteltävissä.

Sovellettaessa z-muunnosta differenssiyhtälön ratkaisemisessa voidaan erottaa seuraavat vaiheet. Ensiksi yhtälön (4.1) kaikille termeille tehdään z-muunnos. Tällöin differenssiyhtälö muuttuu algebralliseksi yhtälöksi, jossa muuttujana on z. Lisäksi lauseen 3.3 avulla päädytään käsittelemään vain muunnosta $Y(z)$. Tämän jälkeen saadusta yhtälöstä ratkaistaan $Y(z)$ ja tarvittaessa muokataan tulosta. Viimeisessä vaiheessa sovelletaan tarkoituksenmukaista menetelmää käänteismuunnoksen $Z^{-1}[Y(z)]$ löytämiseksi.

4.2 Ensimmäisen ja toisen kertaluvun differenssiyhtälöt

Edellisessä alaluvussa esiteltiin z-muunnoksen käyttöä yleisellä tasolla, mutta paremman käsityksen muunnoksen mahdollisuuksista saa, kun lähdetään tarkastelemaan differenssiyhtälöiden perustapauksia. Tässä vaiheessa on hyvä todeta, että z-muunnoksen ratkaisuvaiheet pysyvät samoina kertaluvusta riippumatta. Asioiden esittäminen kertaluvun mukaisessa järjestyksessä perustuu etupäässä haluun saada vertailukohtaa perinteiseen differenssilaskentaan. Tarkastellaan aluksi ensimmäisen kertaluvun lineaarista differenssiyhtälöä

$$y_{n+1} - ay_n = x_n, \tag{4.5}$$

missä a on vakio. Homogeeninen yhtälö

$$y_{n+1} - ay_n = 0 \tag{4.6}$$

voidaan ratkaista esim. sijoittamalla $y_n = cr^n$ $(c \in \mathbb{R})$ ja sitten jakamalla tekijällä r^n, jolloin nähdään, että $r = a$. Täten homogeenisen yhtälön ratkaisu on

$$y_n^{(h)} = ca^n\,. \tag{4.7}$$

Erityisratkaisun $y_n^{(e)}$ etsimisen hankaluus riippuu tietenkin annetusta jonosta x_n, mutta siirrytään nyt z-muunnokseen.

Katsotaan, miten ratkaisumenetelmää sovelletaan homogeeniseen yhtälöön (4.6).

Esimerkki 4.1. Ratkaistaan z-muunnoksella homogeeninen yhtälö

$$y_{n+1} - ay_n = 0\,.$$

Kuten aikaisemmin on jo todettu, lausetta 3.3 hyödyntämällä saadaan yhtälö

$$z(Y(z) - y_0) - aY(z) = 0.$$

Ratkaistaan $Y(z)$ yhtälöstä

$$(z - a)Y(z) = zy_0\,,$$

jolloin

$$Y(z) = y_0\,\frac{z}{z-a}.$$

Esimerkin 3.1 perusteella löydetään käänteismuunnos $Z^{-1}[Y(z)]$. Tällöin differenssiyhtälön ratkaisu on

$$y_n = y_0 a^n\,,$$

joka kertoo samalla, että tietenkin yhtälössä (4.7) vakio $c = y_0$.

Annettu x_n vaikeuttaa tehtävää, mutta z-muunnoksessa ei tarvitse muistella tarvittavia yritteitä. Seuraava esimerkki valottaakin jo kahta eri perustapaa löytää käänteismuunnos $Z^{-1}[Y(z)]$. Toisessa päädytään usein osamurtokehitelmiin ja ratkaisu löydetään luvussa 3.3 esitettyjen lauseiden avulla. Toinen tapa perustuu residylaskentaan.

Esimerkki 4.2. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y_{n+1} - 3\,y_n = 4n \qquad \text{alkuarvolla} \qquad y_0 = 1.$$

Jälleen lauseen 3.3 perusteella

$$z(Y(z)) - y_0) - 3Y(z) = Z(4n).$$

Yhtälön oikeaksi puoleksi saadaan esimerkin 3.7 mukaisesti

$$\begin{aligned} Z(4n) &= 4\,Z(n \cdot 1) \\ &= \frac{4z}{(z-1)^2}\,. \end{aligned}$$

Seuraavaksi sijoitetaan alkuehto ja ryhmitellään hieman, jolloin

$$(z-3)Y(z) = \frac{4z}{(z-1)^2} + z\,.$$

Ratkaistaan

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{4z + z(z-1)^2}{(z-1)^2(z-3)} \\ &= \frac{z^3 - 2z^2 + 5z}{(z-1)^2(z-3)}\,. \end{aligned}$$

Tälle tarvitaan osamurtokehitelmä, ja jakolaskulla aloittamalla saadaan

$$Y(z) = 1 + \frac{3z^2 - 2z + 3}{(z-1)^2(z-3)}\,.$$

Nyt yhtälöstä

$$Y(z) = 1 + \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

voidaan ratkaista kertoimet A, B ja C, jolloin

$$Y(z) = 1 + \frac{6}{z-3} - \frac{3}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2}\,.$$

Tässä olisi mahdollista yrittää etsiä taulukoista kullekin termille käänteinen z-muunnos $Z^{-1}[Y(z)]$, mutta aikaisemmin esitetyn esimerkin 3.3 sekä yhtälöiden (3.5) ja (3.10) perusteella

$$Z^{-1}[Y(z)] = y_n = \delta_n + 6 \cdot 3^{n-1} u_{n-1} - 3 \cdot 1^{n-1} u_{n-1} - 2(n-1)u_{n-1}.$$

Nyt kun $n = 0$, nähdään siis, että $y_0 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$. Kun sitten $n \geq 1$, niin

$$\begin{aligned} y_n &= 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - 3 - 2(n-1) \\ &= 2 \cdot 3^n - 2n - 1, \end{aligned}$$

josta huomataan, että tämä on ratkaisu myös arvolla $n = 0$.

Lasketaan käänteinen muunnos seuraavaksi residyjen avulla. Varmistetaan ensiksi, että seuraavassa yhtälössä $z = 1$ ja $z = 3$ ovat napoja. Lauseen 2.4 perusteella näin on, kun havaitaan, että osoittajan nollakohdat ovat $z = 0$ ja $z = 1 \pm 2i$. Sovelletaan siis seurauslausetta 3.1 yhtälöön

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{(z^3 - 2z^2 + 5z)\, z^{n-1}}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{(z^2 - 2z + 5)\, z^n}{(z-1)^2(z-3)},$$

jolloin voidaan kirjoittaa

$$y_n = Z^{-1}[Y(z)] = \mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] + \mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 3]\,.$$

Lasketaan kummatkin residyt erikseen ja käytetään lausetta 2.8. Kaksinkertainen napa vaatii hieman pidemmän laskutoimituksen, jolloin

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] \\
&= \mathrm{Res}[\frac{z^3 - 2z^2 + 5z}{(z-1)^2(z-3)} z^{n-1}, 1] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{z}{dz} \left((z-1)^2 \frac{z^3 - 2z^2 + 5z}{(z-1)^2(z-3)} z^{n-1} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{z}{dz} \left(\frac{z^3 - 2z^2 + 5z}{(z-3)} z^{n-1} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{z}{dz} \left(\frac{z^{n+2} - 2z^{n+1} + 5z^n}{(z-3)} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(\frac{((n+2)z^{n+1} - 2(n+1)z^n + 5nz^{n-1})(z-3) - (z^{n+2} - 2z^{n+1} + 5z^n)}{(z-3)^2} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(\frac{(n+1)z^{n+2} - (5n+6)z^{n+1} + (11n+1)z^n - 15nz^{n-1}}{(z-3)^2} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(\frac{(n+1)z^3 - (5n+6)z^2 + (11n+1)z - 15n}{(z-3)^2} z^{n-1} \right) \\
&= \frac{-8n-4}{4} = -2n - 1.
\end{aligned}$$

Jälkimmäiselle residylle saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1},3] &= \mathrm{Res}[\frac{z^3-2z^2+5z}{(z-1)^2(z-3)}z^{n-1},3] \\ &= \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z^3-2z^2+5z}{(z-1)^2(z-3)}z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to 3}\frac{z^3-2z^2+5z}{(z-1)^2}z^{n-1} \\ &= 6\cdot 3^{n-1} \\ &= 2\cdot 3^n.\end{aligned}$$

Laskemalla residyt yhteen päädytään ratkaisuun

$$y_n = 2\cdot 3^n - 2n - 1,$$

joka on tietysti sama kuin osamurtokehitelmällä saatu tulos.

Tarkastellaan seuraavaksi toisen kertaluvun lineaarista vakiokertoimista homogeenista differenssiyhtälöä

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0. \tag{4.8}$$

Tällöin yhtälön (4.4) mukainen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0\,, \tag{4.9}$$

jonka juuret ovat r_1 ja r_2. Tämän jälkeen ratkaisu riippuu siitä, onko karakterisella yhtälöllä yksi ($r_1 = r_2$) vai kaksi reaalista juurta, vai ovatko juuret kompleksisia. Tässä on tarpeetonta käydä kaikkia tapauksia läpi. Voidaan esimerkiksi olettaa tunnetuksi, että reaalisten juurien ollessa kyseessä ratkaisu on muotoa

$$y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n\,, \tag{4.10}$$

missä vakiot c_1 ja c_2 ovat reaalilukuja. Differenssilaskennan perusteoksissa lukija voi perehtyä tarkemmin homogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun (ks. esim. [2, s. 70 – 73]).

Käytettäessä z-muunnosta ratkaisutapa ei olennaisesti eroa ensimmäisen kertaluvun yhtälöstä, mutta ratkaistavan yhtälön termien lukumäärä alkaa kasvaa.

Esimerkki 4.3. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

alkuarvoilla $y_0 = 2$ ja $y_1 = 5$. Nyt karakteristisen yhtälön $r^2 - 3r + 2 = 0$ juuret ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = 2$. Molemmat juuret ovat reaalisia, joten yhtälön ratkaisu on

$$y_n = c_1 1^n + c_2 2^n.$$

Alkuarvoista voidaan ratkaista, että $c_1 = -1$ ja $c_2 = 3$. Tehdään sama z-muunnoksella, jolloin

$$z^2(Y(z) - 2 - 5z^{-1}) \; - 3(z(Y(z) - 2)) \; + 2\,Y(z) = 0.$$

Tästä edelleen saadaan

$$Y(z)(z^2 - 3z + 2) - 2z^2 + z = 0,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$Y(z) = \frac{2z^2 - z}{(z-1)(z-2)}\,.$$

Tässä voidaan huomata, että karakteristisen yhtälön juuret ovat z-muunnoksen napoja. Tämä saa selityksen myöhemmin. Residylaskennalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] &= \lim_{z\to 1} \frac{2z^2 - z}{z-2} z^{n-1} = -1 \cdot 1^{n-1} = -1 \quad \text{ja} \\
\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 2] &= \lim_{z\to 2} \frac{2z^2 - z}{z-1} z^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Ratkaisu on siis molemmilla tavoilla laskettuna

$$y_n = -1 + 3 \cdot 2^n.$$

Tarkastellaan luvun lopuksi hieman yleisemmin diskreettiä systeemiä, jonka käyttäytymistä kuvataan toisen kertaluvun differenssiyhtälöllä

$$a_2\, y_{n+2} + a_1\, y_{n+1} + a_0\, y_n = b_2\, x_{n+2} + b_1\, x_{n+1} + b_0\, x_n\,, \tag{4.11}$$

missä alkuarvot y_0, y_1, x_0 ja x_1 tunnetaan. Katsotaan, miten tämän yhtälön homogeeninen ja ei-homogeeninen ratkaisu löydetään. Käytetään homogeenisen yhtälön ratkaisun z-muunnokselle merkintää $Y_h(z)$ (vastaavasti erityisratkaisun muunnokselle $Y_e(z)$), jolloin homogeenisen yhtälön ratkaisu $y_n^{(h)}$ saadaan käänteisellä muunnoksella $Z^{-1}[Y_h(z)]$. Aikaistusta koskevan lauseen 3.3 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
a_2(z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1) + a_1(zY(z) - zy_0) + a_0Y(z) &= \\
b_2(z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1) + b_1(zX(z) - zx_0) + b_0X(z)&.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ryhmitellään tämä muotoon

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{b_2z^2 + b_1z + b_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0} X(z) \\
&+ \frac{z^2(a_2y_0 - b_2x_0) + z(a_2y_1 + a_1y_0 - b_2x_1 - b_1x_0)}{a_2z^2 + a_1z + a_0}\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisuun päästään, kun $x_n = 0$ kaikilla arvoilla n. Tällöin homogeenisen yhtälön muunnos on

$$Y_h(z) = \frac{z^2 a_2 y_0 + z(a_2 y_1 + a_1 y_0)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \tag{4.14}$$

josta käänteisellä muunnoksella saadaan homogeenisen yhtälön ratkaisu $y_n^{(h)}$. Erityisratkaisun löytämiseksi oletetaan, että systeemi on levossa, kun $n < 0$. Tällöin $x_n = y_n = 0$, kun $n < 0$. Täten arvoilla $n = -2$ ja $n = -1$ voidaan yhtälöstä (4.11) ratkaista

$$y_0 = b_2 x_0 / a_2 \quad \text{ja} \quad y_1 = (b_1 x_0 + b_2 x_1 - a_1 y_0)/a_2. \tag{4.15}$$

Sijoittamalla nähdään, että

$$\begin{aligned} Y_e(z) &= \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} X(z) \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{2} b_j z^j}{\sum_{j=0}^{2} a_j z^j} X(z), \end{aligned} \tag{4.16}$$

joka on ratkaistavan differenssiyhtälön erityisratkaisun muunnos, josta käänteisen muunnoksen avulla saadaan erityisratkaisu $y_n^{(e)}$. Vrt. [4, s. 67 – 68].

4.3 Kertalukua p olevat differenssiyhtälöt

Kuten edellä on jo mainittu, kertaluvun kasvattaminen ei tuo olennaista muutosta ratkaisumenetelmään, mutta teknisesti se vaikeuttaa lopputulokseen pääsyä. Tarkastellaan yleistä kertalukua p olevaa lineaarista differenssiyhtälöä

$$\begin{aligned} a_p\, y_{n+p} + a_{p-1}\, y_{n+p-1} + \cdots + a_0 y_n \\ = b_p\, x_{n+p} + b_{p-1}\, x_{n+p-1} + \cdots + b_0 x_n\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

missä kertoimet $a_0, \ldots, a_p$ ($a_0 \neq 0, a_p \neq 0$) ja $b_0, \ldots, b_p$ ovat reaalisia vakioita. Lasketaan aluksi z-muunnos homogeeniselle yhtälölle

$$a_p\, y_{n+p} + a_{p-1}\, y_{n+p-1} + \cdots + a_0 y_n = 0\,. \tag{4.18}$$

Aikaistusta koskevan lauseen 3.3 mukaan

$$Z(y_{n+p}) = z^p (Y(z) - \sum_{m=0}^{p-1} y_m z^{-m})\,, \tag{4.19}$$

jolloin yhtälön (4.18) z-muunnos voidaan hieman ryhmitellen esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
a_p z^p \left(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - \dots \qquad - y_{p-1} z^{-p+1}\right) + \\
a_{p-1} z^{p-1} \left(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - \dots - y_{p-2} z^{-p+2}\right) + \\
. \\
. \\
. \\
a_2 z^2 \,(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1}) + \\
a_1 z^1 \,(Y(z) - y_0) + \\
a_0\, z^0 \;\; Y(z) \; = 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Tästä nähdään, että homogeenisen yhtälön ratkaisun muunnos on

$$
Y_h(z) = \frac{\sum_{j=1}^{p} a_j z^j \, \sum_{k=0}^{j-1} y_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^k}\,. \tag{4.21}
$$

Yhtälö (4.21) selittää osaltaan, miksi karakteristisen yhtälön juuret ovat z-muunnoksen napoja. Nimittäjänä olevan polynomin kertoimet ovat samat kuin karakteristisessa yhtälössä, joten nimittäjän nollakohdat ovat myös karakteristisen yhtälön juuria.

4.4 Siirtofunktio ja konvoluutio

Seuraavaksi käsitellään differenssiyhtälön ratkaisemista tavalla, joka hieman muistuttaa perinteistä differenssilaskentaa. Tarkastellaan yleistä lineaarista vakiokertoimista kertalukua p olevaa differenssiyhtälöä, joka on muotoa

$$
\begin{aligned}
a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_{p-1} y_{n-p+1} + a_p y_{n-p} \\
= b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_{q-1} x_{n-q+1} + b_q x_{n-q},
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

missä kertoimet $a_0, \dots, a_p$ ja $b_0, \dots, b_q$ ovat reaalisia vakioita. Tässä voidaan asettaa, että $a_0 = 1$. Lisäksi oletetaan, että $q \leq p$. Tässä on hyvä huomauttaa yhtälön kertoimien indeksoinnista, joka poikkeaa aikaisemmin esim. yhtälössä (4.17) käytetystä. Tämä helpottaa indeksointia, kun lähdetään käsittelemään edellistä yhtälöä viiveen avulla. Kirjoitetaan yhtälö lyhyemmin ilmaistuna, jolloin

$$
y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{q} b_k x_{n-k}\,. \tag{4.23}
$$

Viiveelle (lause 3.4) on johdettu

$$
Z(x_{n-k} u_{n-k}) = z^{-k} X(z), \tag{4.24}
$$

joten yhtälölle (4.23) saadaan

$$Y(z)+\sum_{k=1}^{p} a_k Y(z) z^{-k}=\sum_{k=0}^{q} b_k X(z) z^{-k} \tag{4.25}$$

ja edelleen

$$Y(z)(1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k})=X(z)\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}\,. \tag{4.26}$$

Nyt osamäärää

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{(1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k})}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}} \tag{4.27}$$

sanotaan kertalukua p olevan differenssiyhtälön *siirtofunktioksi* ja siirtofunktion käänteismuunnosta $h_n = Z^{-1}[H(z)]$ kutsutaan *impulssivasteeksi* (ks. [3, s. 380]). Nähdään, ettei siirtofunktiota ole määritelty, mikäli yhtälö (4.22) on homogeeninen. Vrt. [3, s. 360 – 361].

Mikäli lähdettäisiin liikkeelle yhtälöstä

$$a_p\, y_{n+p}+a_{p-1}\, y_{n+p-1}+\cdots+a_0 y_n=b_q\, x_{n+q}+b_{q-1}\, x_{n+q-1}+\cdots+b_0 x_n \tag{4.28}$$

ja ratkaistaisiin se aikaistuksen avulla, saataisiin siirtofunktio muodossa

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{k}}. \tag{4.29}$$

Yhtälöstä (4.28) voidaan toisen kertaluvun tapaan (ks. yhtälö (4.16)) ratkaista z-muunnoksen erityisratkaisu $Y_e(z)$. Pitkähkö indeksien käsittely voidaan tässä yhteydessä kuitenkin sivuuttaa, ja todeta siirtofunktion sekä erityisratkaisun muunnoksen yhteys

$$Y_e(z)=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{k}} X(z)=H(z)X(z). \tag{4.30}$$

Vrt. [4, s. 80 – 81].

Nyt havaitaan erityisratkaisun, siirtofunktion ja konvoluution yhteys, koska lauseen 3.5 perusteella

$$\begin{aligned} y_n^{(e)} &= Z^{-1}[Y_e(z)] = Z^{-1}[H(z)X(z)] \\ &= h_n * x_n = \sum_{i=0}^{n} h_{n-i} x_i. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Vrt. [3, s. 360 – 361].

Kun homogeeninen ja ei-homogeeninen osa ratkaistaan erikseen, ratkaisutapa muistuttaa hieman perinteistä differenssilaskentaa. Erottelua ei kuitenkaan välttämättä tarvitse tehdä, mutta toisaalta siirtofunktion käyttö voi nopeuttaa tuloksen löytymistä. Tällöin voidaan erottaa neljä vaihetta.

(i) Ratkaistaan homogeeninen yhtälö ja saadaan $y_n^{(h)}$.

(ii) Rakennetaan siirtofunktio $H(z)$ ja ratkaistaan h_n.

(iii) Annetaan erityisratkaisu joko siirtofunktion avulla muodossa

$$y_n^{(e)} = Z^{-1}[H(z)X(z)]$$

tai konvoluutiolla

$$y_n^{(e)} = \sum_{i=0}^{n} h_{n-i}x_i.$$

(iv) Yleinen ratkaisu on

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(e)}.$$

[3, s. 368].

Ratkaisun antaminen konvoluutiomuodossa ei usein ole kovin havainnollista, mutta siirtofunktio on hyödyllinen erityisesti, jos homogeeninen osa tunnetaan tai on helposti ratkaistavissa. Usein differenssiyhtälön (4.22) oikealla puolella on vain yksi termi, jolloin yhtälössä

$$a_0y_n + a_1y_{n-1} + a_2y_{n-2} + \cdots + a_{p-1}y_{n-p+1} + a_py_{n-p} = b_qx_{n-p} \tag{4.32}$$

voidaan indeksejä siirtämällä päästä yhtälötyyppiin

$$a_0\, y_{n+p} + a_1\, y_{n+p-1} + \cdots + a_py_n = b_q\, x_n \tag{4.33}$$

(vrt. [3, s. 361]). Esityksen lopuksi vielä tähän liittyvä esimerkki siirtofunktion käytöstä.

Esimerkki 4.4. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n$$

alkuarvoilla $y_0 = 2$ ja $y_1 = 5$. Esimerkin 4.3 perusteella homogeenisen yhtälön ratkaisu on

$$y_n^{(h)} = -1 + 3 \cdot 2^n.$$

Nyt siirtofunktioksi saadaan

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_kz^{-k}} &= \frac{1\, z^{-2}}{1 + (-3)z^{-1} + 2z^{-2}} \\ = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)}. \end{aligned}$$

Toisaalta tiedetään, että

$$Z[3^n] = X(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Tällöin voidaan ratkaista

$$\begin{aligned}
Y(z) = H(z)X(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,\frac{z}{(z-3)} \\
&= \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,.
\end{aligned}$$

Lasketaan navoille residyt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] &= \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-2)(z-3)} z^{n-1} = \frac{1}{2}\,, \\
\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 2] &= \lim_{z\to 2} \frac{z}{(z-1)(z-3)} z^{n-1} = -2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{ja} \\
\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}, 3] &= \lim_{z\to 3} \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}.
\end{aligned}$$

Täten saadaan erityisratkaisu

$$y_n^{(e)} = Z^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{2} - 2^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n.$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$\begin{aligned}
y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(e)} &= -1 + 3 \cdot 2^n + \frac{1}{2} - 2^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n \\
&= -\frac{1}{2} + 2 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n \\
&= \frac{1}{2}\,(2^{n+2} + 3^n - 1).
\end{aligned}$$

Viitteet

[1] Elaydi, Saber N. *An Introduction to Difference Equations*, New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1996.

[2] Kelley, Walter G. and Peterson, Allan C. *Difference Equations: An Introduction with Applications*, San Diego, CA: Academic Press, Inc., 1991.

[3] Mathews, John H. and Russell, Howell W. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering* 5th ed., Sudbury, MA: Jones and Bartlett Publishers, Inc., 2006.

[4] Vich, Robert. *Z Transform Theory and Applications*, Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1987.